

Profesor
Jorge Navarro



ALGEBRA

GRUPO PITÁGORAS





Productos notables



Son productos indicados que tiene una forma determinada, de los cuales se puede recordar fácilmente su desarrollo sin necesidad de efectuar la operación.

1. Binomio al cuadrado:

$*(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$*(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Observación: $(a-b)^{2n} = (b-a)^{2n}$; $n \in Z^+$

Corolario: (legendre)

$*(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$

$*(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$

Observación:

$(a+b)^4 - (a-b)^4 = 8ab(a^2+b^2)$





PRODUCTOS NOTABLES

TEORÍA

Observación:

*si : $(a+b)^2 = 4ab$ entonces: a=b

JENV

*si: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{4}{a+b}$ entonces: a=b

2. Diferencia de cuadrados:

*$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

3. Binomio al cubo:



*$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$

JENV

*$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$

JENV

Observación:

*$(a+b)^3 + (a-b)^3 = 2a(a^2 + 3b^2)$

*$(a+b)^3 - (a-b)^3 = 2b(3a^2 + 2b^2)$

JENV

JENV

JENV



PRODUCTOS NOTABLES

TEORÍA



4. Suma y diferencia de cubos:

*$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

*$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

5. Identidad de Steven:

*$(x+a)(x+b)= x^2 + (a+b)x + ab$

*$(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ac)x + abc$





PRODUCTOS NOTABLES

TEORÍA



6. Trinomio al cuadrado:

*$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ac)$

JENV

JENV

7. Trinomio al cubo:

*$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(a+c)$

*$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b+c)(ab+bc+ac) - 3abc$

*$(a+b+c)^3 = 3(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) - 2(a^3 + b^3 + c^3) + 6abc$

JENV

JENV

JENV



PRODUCTOS NOTABLES

TEORÍA

JENV

8. Identidad de argand:

$*(x^{2m} + x^m y^n + y^{2n})(x^{2m} - x^m y^n + y^{2n}) = x^{4m} + x^{2m}y^{2n} + y^{4n}$

En particular: ***JENV***

$(a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1) = a^4 + a^2 + 1$

JENV

9. Identidad de gauss:

$*a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$

JENV



PRODUCTOS NOTABLES

TEORÍA

10. Identidad de lagrange:

$$*(ax+by)^2 + (ay-bx)^2 = (x^2+y^2)(a^2+b^2)$$

11. Identidad auxiliar:

$$*(a+b)(b+c)(a+c) = (a+b+c)(ab+bc+ac) - abc$$

Otras identidades:

$$*(a+b+c)^3 + 2(a^3 + b^3 + c^3) = 3(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2) + 6abc$$

$$*a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$$







Identidades condicionales





*$a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab+bc+ac)$

*$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

*$a^4 + b^4 + c^4 = 2[(ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2] = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)^2$

*$a^5 + b^5 + c^5 = -5abc(ab+bc+ac)$

*$\left(\frac{a^5+b^5+c^5}{5}\right)\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right) = \left(\frac{a^7+b^7+c^7}{7}\right)$





PRODUCTOS NOTABLES

TEORÍA



2. Si : $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$

Entonces a=b=c

3. Si: $a^2 + b^2 + c^2 = 0$,

entonces: a= 0 ; b= 0 ; c= 0

4. Si: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

entonces: a+b+c=0 v a=b=c



PRODUCTOS NOTABLES



1. Si $\left(\frac{x}{y}\right)^{n} + \left(\frac{y}{x}\right)^{n} = 62\,;\ \ n\ e\ \mathbb{Z}^{+}\ \ ;\ \ x > 0\ \ ; y > 0$

Halle el valor de T:

$$T = \sqrt[3]{\frac{x^{n} + y^{n}}{\sqrt{x^{n} . y^{n}}}}$$

A) 5 B) 2 C) 1 D) 4

<u>Solución:</u>

De dato:

$$\frac{x^{n}}{y^{n}} + \frac{y^{n}}{x^{n}} = 62 \longrightarrow x^{2n} + y^{2n} = 62x^{n}y^{n}$$

Sumamos a ambos miembros:



$$x^{2n} + y^{2n} {\color{red}+ 2x^{n}y^{n}} = 62x^{n}y^{n} {\color{red}+ 2x^{n}y^{n}}$$



PRODUCTOS NOTABLES



De donde:

$$(x^n + y^n)^2 = 64x^n y^n$$

Sacando raíz cuadrada:

$$\longrightarrow x^n + y^n = 8\sqrt{x^n y^n}$$

Nos piden:

$$T = \sqrt[3]{\frac{x^n + y^n}{\sqrt{x^n . y^n}}}$$

Reemplazando:

$$T = \sqrt[3]{\frac{8\sqrt{x^n y^n}}{\sqrt{x^n . y^n}}}$$

De donde:

$$T = \sqrt[3]{8}$$

$$T = 2$$



PRODUCTOS NOTABLES

2. Si:

$$(2x+3y-z)^2-(2x-3y+z)^2=2[4x^2+9y^2+z^2-6yz]$$



Determine el valor de:

$$N=\frac{6y-2z}{x}-\frac{2x-3y}{z}$$

A) 3 B) 1 C) 8 D) 5

Solución:

Del dato:

$$(2x+(3y-z))^2-\left(2x-(3y-z)\right)^2=2[4x^2+(9y^2-6yz+z^2)]$$

Por legendre:

$$\longrightarrow 4(2x)(3y-z)=2[(2x)^2+(3y-z)^2]$$

De donde:

$$(2x)^2+(3y-z)^2-2(2x)(3y-z)=0$$



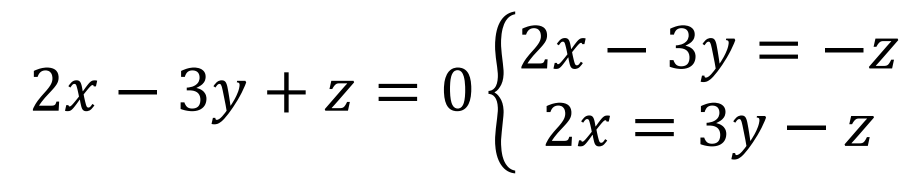




De aquí:

$$(2x - 3y + z)^2 = 0$$

Entonces:



$$2x - 3y + z = 0 \begin{cases} 2x - 3y = -z \\ 2x = 3y - z \end{cases}$$

Entonces en lo pedido:

$$N = \frac{6y - 2z}{x} - \frac{2x - 3y}{z}$$

$$N = \frac{4x}{x} - \frac{-z}{z}$$

$$N = 5$$



PRODUCTOS NOTABLES



3. Si $a+b=\sqrt{14\pi}$ y $ab=\frac{5\pi}{4}$; a>b entonces el valor de $a^2 - b^2$

$A)\sqrt{14\pi}$ $B)\ 2\sqrt{14\pi}$ $C)\ 3\sqrt{14\pi}$ $D)\ 4\sqrt{14\pi}$ $E)\ 5\sqrt{14\pi}$

JENV

JENV

Solución:

Por lo datos que tenemos debemos pensar en aplicar la identidad de legendre:

JENV

Sabemos: $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$

Reemplazando tenemos: $(\sqrt{14\pi})^2 - (a-b)^2 = 4\,\frac{5\pi}{4}$

De aquí tenemos: $14\pi - 5\pi = (a-b)^2$

JENV

JENV



JENV



PRODUCTOS NOTABLES



De donde: $9\pi = (a-b)^2$

Por lo tanto: $a-b= 3\sqrt{\pi}$

Nos piden: $a^2 - b^2 = (a+b)\,(a-b)$

Reemplazando tenemos: $\sqrt{14\pi}\;3\sqrt{\pi}$

Por lo tanto: $3\sqrt{14}\pi$



PRODUCTOS NOTABLES



4. Siendo que: $x + \frac{1}{x} = -1 \quad , calcule:$

$$E = x^{79} + \frac{1}{x^{124}}$$

A) -1 B) 1 C) 2 D) -2 E)0

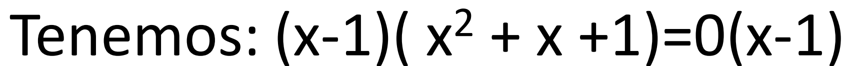
Solución:

Del dato: todo por x:

Tenemos: $x^2 + 1 = -x$

De donde: $x^2 + x + 1 = 0$

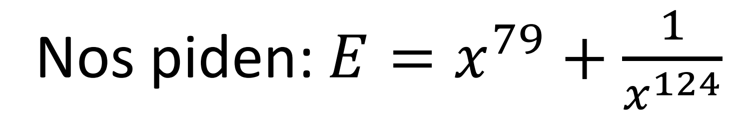

Multipliquemos por (x-1):


Tenemos: $(x-1)(x^2 + x + 1) = 0(x-1)$




Entonces: $x^3 - 1^3 = 0$

Luego: $x^3 = 1$


Nos piden: $E = x^{79} + \frac{1}{x^{124}}$

Efectuando: $E = \frac{x^{203} + 1}{x^{124}}$

Entonces: $E = \frac{(x^3)^{67} x^2 + 1}{(x^3)^{41} x} = \frac{x^2 + 1}{x} = -1$



5. Si:



$$x^3 + y^3 + z^3 = 14xyz \quad \wedge$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + xz + 1$$

Halle el valor de:

$$T = \frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} - 11(xy + yz + xz)$$

A) -2 B) -3 C) 0 D) -1

Solución:

Por identidad de gauss:

$$\longrightarrow x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz)$$

Por dato:

$$\longrightarrow 14xyz - 3xyz = (x + y + z)(xy + yz + xz + 1 - xy - yz - xz)$$

$$\longrightarrow 11xyz = x + y + z$$



PRODUCTOS NOTABLES



JENV

Entonces:

JENV

$*x + y = 11xyz - z \longrightarrow \frac{x+y}{z} = 11xy - 1$

$*\ y + z = 11xyz - x \longrightarrow \frac{y+z}{x} = 11yz - 1$

$*\ x + z = 11xyz - y \longrightarrow \frac{x+z}{y} = 11xz - 1$

Ahora nos piden: JENV

$$T = \frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} - 11(xy + yz + xz)$$

Reemplazado:

JENV

$$T = 11xy - 1 + 11yz - 1 + 11xz - 1 - 11(xy + yz + xz)$$

Por lo tanto: $T = -3$ JENV

JENV

JENV





6. Si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$;

$\forall\, a, b, c\ e\ \mathbb{R} - \{0\}$

Halle el valor de:

$$M = \frac{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(a^2+c^2) + a^2b^2c^2}{(ab+bc+ac)(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)}$$

A) ½ B) 2 C) 5/2 D) 1

Solución:

Del dato:

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$$

Multipliquemos por (2):

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 2ab + 2bc + 2ac$$





De donde:

$$(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (a^2 - 2ac + c^2) = 0$$

De donde:

$$\longrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2 = 0$$

Entonces se cumple:

$$a = b = c$$

Nos piden:

$$M = \frac{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(a^2+c^2) + a^2b^2c^2}{(ab+bc+ac)(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)}$$



PRODUCTOS NOTABLES

Todo en función de a:

$$M = \frac{(a^2 + a^2)(a^2 + a^2)(a^2 + a^2) + a^2a^2a^2}{(aa + aa + aa)(a^2a^2 + a^2a^2 + a^2a^2)}$$

De donde:

$$M = \frac{8a^6 + a^6}{3a^2.3a^4}$$

Por lo tanto:

$$M = 1$$





PRODUCTOS NOTABLES



7. Si $\{a, b, c\} \subsetneq \mathbb{R} - \{0\}$ talque: $\frac{b}{c} + \frac{c}{a} = -\frac{a}{b}$

Determine el valor de

$$M = a^6c^3 + b^6a^3 + c^6b^3 - 3(a^3b^3c^3 + 1)$$



Solución:

Del dato:

$$\frac{b}{c} + \frac{c}{a} = -\frac{a}{b}$$

Tenemos:

$$\frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b} = 0$$



PRODUCTOS NOTABLES



Elevando al cubo:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3+\left(\frac{b}{c}\right)^3+\left(\frac{c}{a}\right)^3+3\left(-\frac{a}{b}\right)\left(-\frac{b}{c}\right)\left(-\frac{c}{a}\right)=0$$

De donde:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3+\left(\frac{b}{c}\right)^3+\left(\frac{c}{a}\right)^3=3\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{c}\right)\left(\frac{c}{a}\right)$$

De aquí:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3+\left(\frac{b}{c}\right)^3+\left(\frac{c}{a}\right)^3=3$$





PRODUCTOS NOTABLES

Multipliquemos por ($a^3b^3c^3$)

De donde:

$$a^6c^3 + b^6a^3 + c^6b^3 = 3a^3b^3c^3$$

Nos piden:

$$M = a^6c^3 + b^6a^3 + c^6b^3 - 3(a^3b^3c^3 + 1)$$

Por lo tanto:

$$M = -3$$



PRODUCTOS NOTABLES



8. Sea $\{x; y\} \subset \mathbb{R}$ de modo que

$$\frac{1}{3x-2y}+\frac{1}{2x+3y}=\frac{4}{5x+y}$$

JENV

JENV

el valor de $\frac{x+2y}{2x-y}$ es.

JENV

A) 7/9 B) 1 C) 9/7

D) 2 E) 19/7 UNI 2015 II

Solución:

JENV

Se observa que se puede utilizar la implicancia del binomio al cuadrado:

Ósea del dato: $\frac{1}{3x-2y}+\frac{1}{2x+3y}=\frac{4}{5x+y}$

Podemos decir: $3x - 2y = 2x + 3y$

De donde: $x = 5y$

Nos piden: $\frac{x+2y}{2x-y}=\frac{5y+2y}{2(5y)-y}=\frac{7y}{9y}=\frac{7}{9}$

JENV

JENV



PRODUCTOS NOTABLES



9. Si $a + b + c = 1$ y $a^3 + b^3 + c^3 = 4$, entonces el valor de:

$$M = \frac{1}{a + bc} + \frac{1}{b + ac} + \frac{1}{c + ab} \quad \text{es:}$$

JENV

A) – 2 B) – 1 C) 0

D) 1 E) 2 UNI 2016 II

JENV

Solución:

De los datos:

JENV

i) a+b+c= 1 elevaremos al cubo:

JENV

$(a+b+c)^3 = 1^3$

Desarrollamos el trinomio: $a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(a+c)=1$

JENV

JENV



PRODUCTOS NOTABLES

De donde: (a+b)(b+c)(a+c)= -1

Nos piden:

$$M = \frac{1}{a + bc} + \frac{1}{b + ac} + \frac{1}{c + ab}$$

Trabajaremos la primera fracción:

$$*\frac{1}{a+bc} = \frac{1}{a.1+bc} = \frac{1}{a(a+b+c)+bc} = \frac{1}{a^2+ab+ac+bc} = \frac{1}{(a+b)(a+c)}$$

Análogo:

$$*\frac{1}{b+ac} = \frac{1}{(a+b)(b+c)}$$

$$*\frac{1}{c+ab} = \frac{1}{(a+c)(b+c)}$$





PRODUCTOS NOTABLES



Luego:

$$M = \frac{1}{a + bc} + \frac{1}{b + ac} + \frac{1}{c + ab}$$

$$M = \frac{1}{(a+b)(a+c)} + \frac{1}{(a+b)(b+c)} + \frac{1}{(a+c)(b+c)}$$

De donde:

$$M = \frac{2(a+b+c)}{(a+b)(b+c)(a+c)} = \frac{2}{-1} = -2$$



PRODUCTOS NOTABLES



JENV

JENV

10. Si: $a^2 + b^2 + c^2 = 2$

$$(1 + ab + ac + bc)(a + b + c) = (a^2 + b^2 + c^2)^5$$

Calcular: x= a + b + c

A) 0 B) –1 C) –x D) x E) x + 1

Solución:

De los datos: sea: a+b+c= x y ab+bc+ac=y

Entonces, reemplazando:

$(1+y)x=2^5$

De donde: (1+y)x = 32 …(I)

JENV

Por otro lado sabemos:

$(a+b+c)^2 =(a^2 +b^2 + c^2 + 2(ab +bc +ac)$

Reemplazando: $x^2 = 2 + 2y$

de donde: $y= (x^2 – 2)/2$ …(II)

Luego: (II) en (I):

$[1 + \frac{x^2-2}{2}]x = 32$ Entonces: $x^3 = 64$

Por lo tanto: x=4





CLAVES



Claves :

11.D

12. D

13.E

14.D

15.B

16.E

17.D

18.C

19.B

20.C







PRACTICA Y APRENDERÁS